



استفاده از روش بسط نودال در محاسبات قلب رآکتورهای با مجتمع سوخت مربعی

محمد یعقوب عبدالله زاده*^۱، مهرداد بروشکی^۲

۱- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیر طوسی، صندوق پستی: ۱۹۹۹-۱۹۳۹۵، تهران- ایران
۲- دانشکده مهندسی انرژی، دانشگاه صنعتی شریف، صندوق پستی: ۹۵۶۷-۱۱۳۶۵، تهران- ایران

چکیده: بر اساس روش بسط نودال یک برنامه کامپیوتری برای حل معادله‌ی پخش مستقل از زمان در رآکتورهای با مجتمع سوخت مربعی بسط داده شده است. در این مقاله به نحوه‌ی محاسبه‌ی ضریب تکثیر مؤثر، شار در گروه‌های مختلف و توزیع قدرت با استفاده از روش بسط نودال پرداخته شده است. پس از مختصر توضیحی درباره‌ی روش‌های محاسباتی تفاضل محدود و اجزای محدود، از مقایسه نتایج آن‌ها با روش بسط نودال، برتری روش نودال اثبات شده است. نتایج به دست آمده از روش بسط نودال با مسایل آزمون معروف مقایسه شده‌اند که توافق خوبی بین آن‌ها مشاهده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: محاسبات بحرانی، روش نودال، محاسبات توزیع قدرت، روش‌های عددی

Using Nodal Expansion Method in Calculation of Reactor Core with Square Fuel Assemblies

M.Y. Abdollahzadeh*¹, M. Boroushaki²

1- Department of Mechanical Engineering, Khaje Nasir Toosi University of Technology, P.O. Box: 19395-1999, Tehran – Iran
2- Department of Energy Engineering, Sharif University of Technology, P.O. Box: 11365-9567, Tehran – Iran

Abstract: A polynomial nodal method is developed to solve few-group neutron diffusion equations in cartesian geometry. In this article, the effective multiplication factor, group flux and power distribution based on the nodal polynomial expansion procedure is presented. In addition, by comparison of the results the superiority of nodal expansion method on finite-difference and finite-element are fully demonstrated. The comparison of the results obtained by these method with those of the well known benchmark problems have shown that they are in very good agreement.

Keywords: Critically Calculation, Nodal Expansion Method, Power Calculation, Numerical Methods

*email: abdollahzadeh@dena.kntu.ac.ir



۱- مقدمه

$$\sum_{gg'} \delta_{gg'} \sum_g^l - \sum_{gg'}^s - \frac{\chi_g \nu \sum_{g'}^f}{k_{eff}} = D_g \quad (2)$$

$\Phi(\vec{r})$ ماتریسی است که ستون‌های آن را شار گروه‌های مختلف تشکیل می‌دهد، یعنی

$$\Phi(\vec{r}) = [\Phi_1(\vec{r}), \Phi_2(\vec{r}), \dots, \Phi_G(\vec{r})] \quad (3)$$

در این مقاله هدف حل معادله‌ی دو گروهی می‌باشد، بنابراین در معادله‌ی بالا $G=2$ است. برای حل این معادله سه روش توضیح داده می‌شود.

۲-۱ روش تفاضل محدود

این روش در مراجع مختلف به طور مفصل توضیح داده شده است. معادلات نهایی جدا شده از مرجع [۴] در این جا آورده می‌شود

$$\begin{aligned} a_{i,i-1} \phi_{i-1} + a_{i,i} \phi_i + a_{i,i+1} \phi_{i+1} &= S_i \\ a_{i,i-1} &= -\frac{1}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} \frac{D_i + D_{i-1}}{\Delta_i} \\ a_{i,i} &= \sum_{ai} + \frac{1}{\Delta_i + \Delta_{i+1}} \left[\frac{D_i + D_{i-1}}{\Delta_{i+1}} + \frac{D_i + D_{i-1}}{\Delta_i} \right] \\ a_{i,i+1} &= -\frac{1}{\Delta_i + \Delta_{i+1}} \frac{D_i + D_{i-1}}{\Delta_i} \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن Δ_i بازه‌ای است که ϕ_i شار در مرکز آن است و S چشمه‌ی ناشی از شکافت یا پراکندگی در گروه‌های دیگر است.

۲-۲ روش اجزای محدود

روش اجزای محدود روشی است که در آن، روش ریتز-گالرکین^(۲) با استفاده از توابع چند جمله‌ای قطعه قطعه اعمال می‌گردد [۵]. در این مقاله از توابع چند جمله‌ای هرمیت استفاده شده است که هر تابع دلخواه را بر حسب آن تابع و مشتقاتش تقریب می‌زند. یک تابع هرمیت چند جمله‌ای از

اکنون نزدیک به ۵۰ سال از نخستین مرحله‌ی به کارگیری روش‌های تفاضل محدود در کدهای کامپیوتری نوشته شده برای حل معادله‌های چند گروهی می‌گذرد. پیشرفت‌های بیش‌تر در الگوریتم‌ها و سخت‌افزار کامپیوتر، امکان حل معادلات پیچیده‌تر در فیزیک رآکتور را فراهم ساخته است. اما هنوز هم به دلیل محدودیت حافظه و زمان اجرا، قادر به مدل‌سازی صریح تمام اجزای یک رآکتور نیستیم. به جای این کار با تعیین پارامترهای معادل تئوری چند گروهی پخش برای نواحی بزرگ همگن شده، اغلب شامل یک مجتمع سوخت در یک صفحه عرضی، به حل مسئله می‌پردازیم. حل مسئله به روش تفاضل محدود، برای رسیدن به جواب دقیق به تعداد زیادی نقطه‌ی مش‌بندی نیاز دارد. هزینه‌ی زیاد محاسباتی روش تفاضل محدود ما را به استفاده از روش‌های محاسباتی مؤثرتر، ولی با دقت کم‌تر، هدایت می‌کند. این روش‌ها که برای محاسبه‌ی شار متوسط در نواحی همگن شده به کار می‌روند، به عنوان روش‌های بسط نودال شناخته شده‌اند. مدل flar که در سال ۱۹۶۴ ارائه شد اولین نسل از این روش‌ها بود [۱]. روش‌های بسط نودال از دیرباز مورد توجه بوده‌اند [۲] و اکنون هم در هندسه‌های مختلف، در حال توسعه هستند [۳]. در این تحقیق به منظور حل معادله‌ی شکافت در یک رآکتور چندهمگن و یافتن ضریب تکثیر مؤثر و توزیع شار، یک برنامه‌ی کامپیوتری به نام NEM^(۱) نوشته شده است که از روش بسط نودال استفاده می‌کند. این برنامه مانند کد CITATION، هندسه، شرایط مرزی، طرز مش‌بندی و مشخصات مواد را به عنوان ورودی می‌گیرد و به محاسبه‌ی شار در گروه‌های مختلف، ضریب تکثیر مؤثر و توزیع توان می‌پردازد.

۲- روش محاسبات

معادله‌ی پخش گروهی نوترون در سه بعد را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$-\nabla^2 \Phi(\vec{r}) + \sum (k_{eff}) \Phi(\vec{r}) = 0 \quad (1)$$

که در آن Σ تابع ضریب تکثیر مؤثر بوده و به این صورت تعریف می‌شود



۳-۲ روش نودال در یک بعد

رآکتور را به M ناحیه‌ی بزرگ و مستطیل شکل تقسیم می‌کنیم که گره نامیده می‌شوند. سطح مقطع‌ها در هر گره ثابت فرض می‌شوند. با انتگرال‌گیری از معادله‌ی (۱) بر روی هر گروه به معادله‌ی تعادل نوترون می‌رسیم

$$\frac{1}{h_m} [(j_{gl}^{-m} + j_{gr}^{+m}) - (j_{gl}^{+m} + j_{gr}^{-m})] + \sum_{g'} \Phi_g^m = \sum_{g'} (\sum_{g''}^s + \frac{\chi_g \nu \sum_{g''}^f}{k_{eff}}) \Phi_{g''}^m \quad (10)$$

که در آن جریان‌های جزئی تعریف زیر را دارند و به صورت هندسی در شکل ۱ نشان داده شده‌اند

$$j_{gr}^{+m} - j_{gr}^{-m} = -D_g^m \frac{\partial \phi_g^m}{\partial x} \Big|_r$$

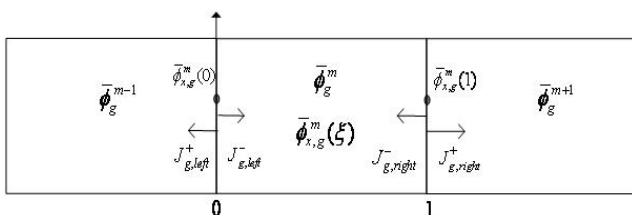
$$j_{gl}^{+m} - j_{gl}^{-m} = -D_g^m \frac{\partial \phi_g^m}{\partial x} \Big|_l \quad (11)$$

l و r نمادهای چپ و راست سلول و h ضخامت آن می‌باشد و شار متوسط درون سلول به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Phi_g^m = \frac{1}{h_m} \int \phi_g^m dx \quad (12)$$

حل معادله‌ی (۱۰) مستلزم دانستن رابطه‌ی شار و جریان درون سلول است. در روش بسط، این رابطه به صورت خود-سازگار از معادله، پخش حاصل شده است. بسط شار در درون هر سلول و برای هر گروه به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\phi_g^m(u) = \sum_{n=0}^N a_{n,g}^m f_n(u) \quad (13)$$



شکل ۱- نمایش هندسی جریان‌های جزئی.

درجه‌ی ۲m-۱ تابع f را تا مشتق مرتبه m-۱ در دو سر بازه‌ی مورد نیاز تقریب می‌زند که به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$H_i^p(x_i) = f^{(p)}(x_i)$$

$$H_i^p(x_{i+1}) = f^{(p)}(x_{i+1}) \quad (5)$$

تابع هرمیت به صورت منفرد تعیین می‌گردد. در فضای چند جمله‌ای قطعه قطعه، تابع هر جزء یک تابع هرمیت با خاصیت (۵) است که فقط در آن جزء تعریف شده و در بقیه‌ی نقاط صفر است. چون ما علاقمند به برقراری پیوستگی در جریان می‌باشیم توابع پایه را به صورت زیر تغییر می‌دهیم

$$U_i^1 = \begin{cases} \frac{\theta}{D^-} U_i^{1-} & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{\theta}{D^+} U_i^{1+} & x_i \leq x \leq x_{i+1} \end{cases} \quad (6)$$

که در آن پارامتر θ ، برابر مقدار متوسط ضریب پخش در دو جزء همسایه انتخاب می‌شود. اکنون به حل مسئله باز می‌گردیم. فرض کنید T یک اپراتور مشتق انتگرال باشد و مسئله به صورت زیر مرتب گردد

$$T\phi(r) = f(r) \quad (7)$$

تابع $\phi(r)$ را از طریق بسط آن با توابع (۶) تقریب می‌زنیم

$$\phi(r) \cong \hat{\phi}(r) = \sum_{i=1}^m a_i U_i(r) \quad (8)$$

α_i تابعی از نقاط مرزی بین سلول‌ها می‌باشد. با قرار دادن تقریب (۸) در معادله (۷) و ضرب طرفین آن در توابع وزن U و انتگرال‌گیری روی دامنه به شکل ماتریسی مسئله می‌رسیم:

$$A\alpha = F$$

$$A = \text{matrix} \{ \int T U_i U_j \}$$

$$\alpha = \text{col} \{ \alpha_i \}$$

$$f = \text{col} \{ \int f U_i \}$$

$$(9)$$

که در آن A را ماتریس سفتی می‌نامند.



۲-۴ روش نودال در دو بعد

روش‌های تفاضل محدود و اجزای محدود در مراجع مختلف [۴ و ۵] به دو بعد بسط داده شده‌اند و تعمیم روش یک بعدی به دو بعد دارند. اما بسط روش نودال به دو و سه بعد نیاز به دقت دارد. در صورتی که از ضرب دو تابع چند جمله‌ای در دو جهت x ، y استفاده شود تعداد ضرایب مجهول زیاد شده و جملات غیرخطی را نیز شامل می‌شود. بنابراین باید از طریق انتگرال گیری، ابعاد را از یکدیگر جدا کنیم و جمله‌های مربوط به متغیر دیگر را در معادله‌ی جهت خاص تا حد ممکن کم‌تر بسط دهیم. برای روشن شدن موضوع تعاریف زیر را در نظر می‌گیریم

$$\Psi_{g,u}^m = \frac{1}{h_v} \int \varphi_g^m dv \quad (17)$$

$$L_{g,u}^m = \frac{-D_g^m}{h_v} \int \frac{\partial^2}{\partial v^2} \varphi_{g,v}^m dv \quad (18)$$

که در آن‌ها u, v می‌توانند هر یک از جهات ممکن x ، y می‌توانند باشند. با استفاده از این تعاریف، معادله‌ی (۱۶) در جهت u به صورت زیر اصلاح می‌شود

$$\int_0^1 w_n(u) \left[\frac{-D_g^m}{h_m^2} \frac{\partial^2 \varphi_g^m}{\partial u^2} + \sum_g' \varphi_g^m - \sum_{g'} (\sum_{s,g,g'}^m + \frac{\chi_g^v \sum_{f,g'}^m}{k_{eff}}) \varphi_g^m + L_{g,u}^m \right] du = 0 \quad (19)$$

توجه کنید که در این معادله L را تا درجه‌ی ۳ (از توابع رابطه‌ی (۱۵) بسط می‌دهیم.

۳- روش کار برنامه‌ی NEM

به طوری که گفته شد برنامه‌ی کامپیوتری NEM با استفاده از روش بسط نودال، هندسه، شرایط مرزی، طرز مش‌بندی و مشخصات مواد را به عنوان ورودی گرفته و به محاسبه‌ی شار گروهی، ضریب تکثیر مؤثر و توزیع قدرت می‌پردازد. با توجه به سه روش گفته شده، در هر روش به حل مسئله‌ی ویژه مقدار به صورت زیر خواهیم رسید

$$M\phi = \frac{1}{k} F\phi \quad (20)$$

که در آن u مختصات بی‌بعد شده در سلول است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$u = \frac{x}{h_m} \quad 0 \leq x \leq h_m, \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (14)$$

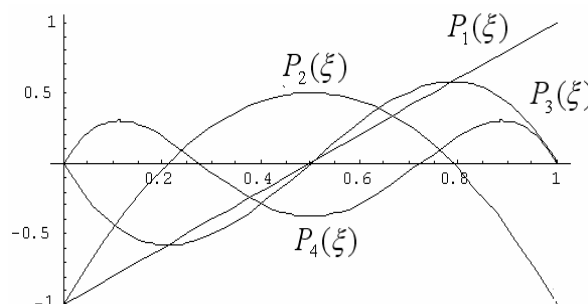
توابع بسط رابطه‌ی (۱۳) به صورت زیر هستند [۲]

$$\begin{aligned} f_0(u) &= 1 \\ f_1(u) &= 2u-1 \\ f_2(u) &= 6u(1-u)-1 \\ f_3(u) &= 6u(1-u)(2u-1) \\ f_4(u) &= 6u(1-u)(6u^2-6u+1) \end{aligned} \quad (15)$$

و در شکل ۲ رسم شده‌اند. توابع بسط به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که با سه تابع اول بتوان شار را در چپ و راست و در وسط سلول حساب کرد؛ برای مراتب بالاتر، توابع باید در چپ و راست صفر شوند و انتگرال آن‌ها روی سلول صفر گردد. بنابراین با اعمال شرایط مرزی شار در چپ و راست سلول و وسط آن می‌توان سه ضریب اول را حساب کرد. برای محاسبه‌ی ضرایب مرتبه‌ی بالاتر از روش باقی‌مانده‌ی وزن‌دار استفاده می‌کنیم. با ضرب طرفین معادله‌ی (۱) در تابع وزن و انتگرال گیری روی سلول داریم

$$\int_0^1 w_n(u) \left[\frac{-D_g^m}{h_m^2} \frac{\partial^2 \varphi_g^m}{\partial u^2} + \sum_g' \varphi_g^m - \sum_{g'} (\sum_{s,g,g'}^m + \frac{\chi_g^v \sum_{f,g'}^m}{k_{eff}}) \varphi_g^m \right] du = 0 \quad (16)$$

در این تحلیل، توابع وزن را (تا درجه‌ی مورد نیاز) برابر همان توابع بسط می‌گیریم.



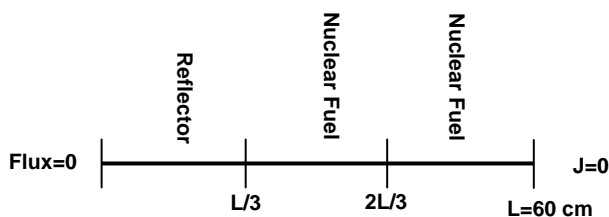
شکل ۲- رسم توابع پایه‌ی بسط نودال.



۴- مقایسه‌ی نتایج به دست آمده

برای ارزیابی نتایج NEM، ابتدا نتایج محاسبات مسئله‌ی کانگ [۵] توسط این کد آورده شده است. صورت مسئله‌ی کانگ در شکل ۳ و ثابت‌های نوترونی آن در جدول ۲ داده شده است. نتیجه‌ی حل این مسئله در جدول ۳ و شکل ۴ آمده است. برای مقایسه‌ی NEM با روش‌های دیگر مسئله یک بعدی IAEA [۷] انتخاب شده است. این مسئله به دلیل پیچیدگی همواره مورد توجه بوده است، زیرا شرط مرزی بازتابنده‌ی آن قابل جای‌گزینی با شرط مرزی آلبو نیست [۸]. صورت مسئله در شکل ۵ و ثابت‌های نوترونی آن در جدول ۴ داده شده است. برای مقایسه‌ی دقت روش بسط نودال با روش‌های تفاضل محدود و اجزای محدود این مسئله در دو مش‌بندی ۱۰cm، ۱cm محدود شده است. برای به دست آوردن نمودار حل دقیق مسئله، از کد Citation که یک کد مرجع پذیرفته شده در سطح بین‌المللی است با مش‌بندی ۱cm استفاده شده است. انتگرال نمودار یافته شده روی سلول‌ها با حل دقیق مسئله در مرجع [۷] تطابق کامل دارد. نتایج حاصل، در شکل‌های ۶ و ۷ و در جدول‌های ۵ تا ۸ آمده است.

جهت نمایش کارایی روش نودال در محاسبه‌ی ضریب تکثیر مؤثر قلب مسئله کانگ در دو بعد آورده شده است. صورت مسئله‌ی کانگ در شکل ۸ و ثابت‌های نوترونی آن در جدول ۲ داده شده است. نتیجه‌ی این تحلیل با مش‌بندی ۶cm در جدول ۹ آمده است.



شکل ۳- هندسه مسئله یک بعدی کانگ.

جدول ۲- سطح مقطع‌های مسئله‌ی ۱ و ۲ بعدی کانگ.

خاصیت	D1	D2	Σ_a^1	Σ_a^2	Σ_s^{12}	$\nu\Sigma_f^2$
سوخت	1.5	0.4	0.0623	0.06	0.2	0.218
بازتابنده	1.2	0.15	0.101	0.1	0.02	0.0

در این رابطه M را اپراتور تخریب (جذب و فرار) و F را اپراتور شکافت گویند. این معادله به روش تکرار توانی حل می‌شود [۶]. این روش دو مرحله دارد: مرحله‌ی تکرار داخلی و مرحله‌ی تکرار خارجی. در مرحله‌ی تکرار داخلی با چشمه و ضریب تکثیر مؤثر مرحله‌ی قبلی تکرار داخلی به محاسبه‌ی شار مرحله جدید و ضریب تکثیر مؤثر آن پرداخته می‌شود. پس از هر مرحله تکرار داخلی در مرحله‌ی تکرار خارجی شرط همگرایی روی چشمه و ضریب تکثیر مؤثر هم‌زمان بررسی می‌شود. در صورت برقراری آن، برنامه پایان می‌پذیرد و در غیر این صورت، مرحله‌ی تکرار داخلی بعدی انجام می‌گیرد. اگر i نشان‌دهنده‌ی مرحله‌ی تکرار خارجی باشد داریم:

$$S_g^{m,i} = \sum_{g'} (\Sigma_{s,gg'}^m + \frac{\chi_g \nu \sum_{f,g'}^m}{k^{i-1}}) \Phi_{g'}^{m,i-1} \quad (21)$$

در این رابطه برای قسمت پراکندگی از آخرین تکرار انجام شده استفاده می‌کنیم. هم‌چنین جهت به روزرسانی جملات چشمه و یافتن مقدار ویژه از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$k^i = \frac{F^i}{F^{i-1}} \quad (22)$$

$$F = \sum_m \sum_g \nu \sum_{fg}^m \Phi_g^{m,n}$$

اعمال شرایط مرزی در کد NEM به این صورت است که وقتی شرط مرزی بر سطح نود n در تماس با مرز اعمال می‌شود خواهیم داشت

$$j_g^{in,n} = c \cdot j_g^{out,n} \quad (23)$$

در مورد شرایط مرزی استاندارد، c از جدول ۱ به دست می‌آید.

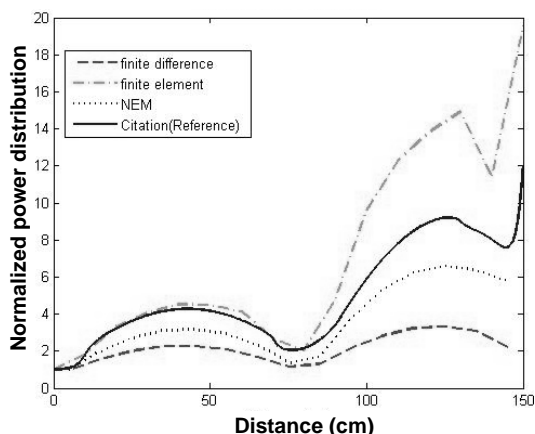
جدول ۱- شرایط مرزی استاندارد.

شرط مرزی	c
شار صفر	-۱
جریان ورودی صفر	۰
جریان خالص صفر	+۱

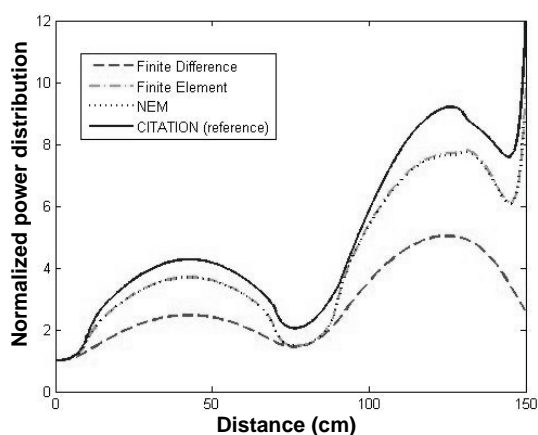


جدول ۳- مقایسه‌ی نتایج برنامه‌ی NEM با مقادیر مرجع مسئله‌ی یک بعدی کانگ.

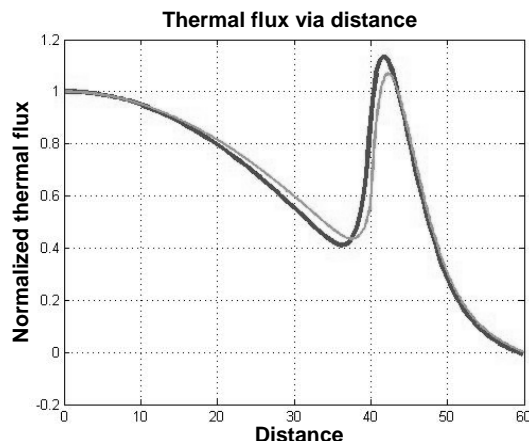
1.0209	مقدار ضریب تکثیر مؤثر مرجع مسئله‌ی کانگ
1.0204	مقدار ضریب تکثیر مؤثر برنامه‌ی NEM
0.05 %	خطای نسبی



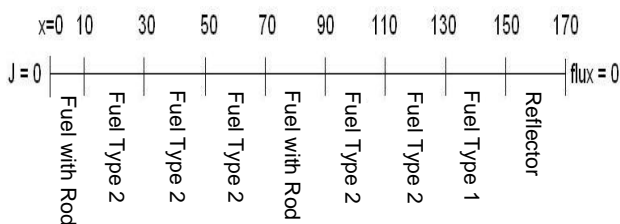
شکل ۶- توزیع مکانی قدرت بهنجار شده، برای مش ۱۰ cm.



شکل ۷- توزیع مکانی قدرت بهنجار شده، برای مش ۱۰ cm.



شکل ۴- توزیع مکانی شار گرمایی مسئله‌ی کانگ با مش بندی ۱ cm.



شکل ۵- هندسه مسئله‌ی یک بعدی IAEA.

جدول ۵- مقایسه‌ی نتایج برنامه‌ی NEM با مقادیر مرجع مسئله‌ی IAEA برای مش بندی ۱۰ cm.

برنامه	مقدار ضریب تکثیر مؤثر	خطای نسبی به ازای مقدار مرجع (۱,۰۰۴۵۱۳)
NEM	1.0037	0.08 %
FD	1.0051	0.06 %
FEM	1.0056	0.11 %

جدول ۴- سطح مقطع‌های مسئله‌ی یک بعدی IAEA.

خاصیت	D2	D1	Σ_a^1	Σ_a^2	Σ_s^{12}	$\nu \Sigma_f^2$
سوخت نوع ۱	0.4	1.5	0.01	0.08	0.02	0.135
سوخت نوع ۲	0.4	1.5	0.01	0.085	0.02	0.135
سوخت به همراه میله کنترل	0.4	1.5	0.01	0.13	0.02	0.135
بازتابنده	0.3	2	0.01	0.01	0.04	0.0

جدول ۶- مقایسه‌ی نتایج برنامه‌ی NEM با مقادیر مرجع مسئله‌ی IAEA برای مش بندی ۱۰ cm.

برنامه	حد اکثر خطای نسبی توزیع قدرت	مجموع خطای نسبی توزیع قدرت
NEM	6.2 %	3.5 %
FD	79.76 %	24.05 %
FEM	39.04 %	12 %

**پی نوشت:**

- ۱- NEM: Nodal Expansion Method
 ۲- Ritz Galerkin

References:

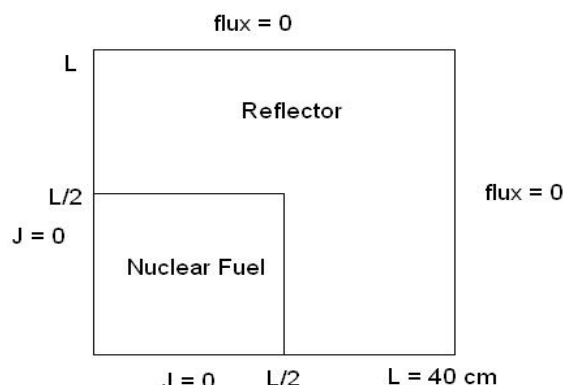
1. R. Stamm'ler, M. Abbate, "Methods of steady-state reactor physics in nuclear design," Academic Press (1983).
2. H. Finnemann, F. Bennewitz, MR. Wagner, "Interface current techniques for multidimensional reactor calculations," Atomkernenergie, 30, 123-128 (1977).
3. B. Xia, Z. Xie, "Flux expansion method for solving multigroup neutron diffusion equations in hexagonal-z geometry," Annals of Nuc Energy, 33, 370-376 (2006).
4. J.J. Duderstandt, L.J. Hamilton, "Nuclear reactor analysis," John Wiley & Sons, New York (1976).
5. C.M. Kang, K.F. Hansen, "Finite element methods for reactor analysis," Nuc Sci Eng, Vol. 51, 456-495 (1973).
6. E.L. Wachspress, "Iterative solution of elliptic systems and application to the neutron diffusion equations of reactor physics," Prentice Hall, Englewood cliffs (1966).
7. Argonne Code Center, "Benchmark problem book," ANL-7416, Supplement 2 (1977).
8. A.F. Henry, "Refinements in accuracy of coarse-mesh finite difference solutions of the group diffusion equations," Seminar on Nuclear Reactor Calculations, IAEA/SM, 154/21, 447 (1972).

جدول ۷- مقایسه‌ی نتایج برنامه‌ی NEM با مقادیر مرجع مسئله‌ی IAEA برای مش بندی ۱۰cm.

برنامه	مقدار ضریب تکثیر مؤثر	خطای نسبی به ازای مقدار مرجع (۱,۰۰۴۵۱۳)
NEM	1.0037	0.08 %
FD	1.0036	0.09 %
FEM	1.0037	0.08 %

جدول ۸- مقایسه‌ی نتایج برنامه‌ی NEM با مقادیر مرجع مسئله‌ی IAEA برای مش بندی ۱cm.

برنامه	حداکثر خطای نسبی توزیع قدرت	مجموع خطای نسبی توزیع قدرت
NEM	5.46 %	3.28 %
FD	51.49 %	10.24 %
FEM	5.51 %	3.28 %



شکل ۸- هندسه‌ی مسئله‌ی دو بعدی کانگ.

جدول ۹- مقایسه‌ی نتایج برنامه‌ی NEM با مقادیر مرجع مسئله‌ی دو بعدی کانگ با مش ۶cm.

0.89759	مقدار ضریب تکثیر مؤثر مرجع مسئله‌ی کانگ
0.906125	مقدار ضریب تکثیر مؤثر برنامه‌ی NEM
0.95 %	خطای نسبی

۵- نتیجه گیری

با توجه به نتایج جدول ۳ و شکل ۴، NEM ضریب تکثیر و شار در گروه‌های مختلف را در مسئله‌ی کانگ به خوبی تخمین می‌زند. نتایج شکل ۶ و جدول‌های ۵ و ۶ نیز نشان‌دهنده‌ی برتری روش بسط نودال بر روش‌های تفاضل محدود و اجزای محدود در حل مسئله‌ی یک بعدی IAEA در مش‌های بزرگ می‌باشد. همان‌طور که نتایج شکل ۷ و جداول ۷ و ۸ نشان می‌دهند با ریزتر کردن مش بندی، خطای روش‌های عددی کاهش می‌یابند اما هنوز هم خطای روش بسط نودال نسبت به روش‌های دیگر کم‌تر است. در نهایت جدول ۹ نشان‌دهنده‌ی سرعت بالای روش بسط نودال در تخمین مقدار ضریب تکثیر مؤثر قلب در مسئله‌ی دو بعدی کانگ است.