



بررسی دینامیک غیرخطی دو بعدی، سه بعدی و چهار بعدی راکتورهای شکافت و پارامترهای مؤثر بر رفتار آن

مجتبی تاجیک*^۱، عباس قاسمی‌زاد^۲

۱- دانشکده فیزیک، دانشگاه علوم پایه دامغان، صندوق پستی: ۴۱۱۶۷-۳۶۷۱۶، دامغان - ایران

۲- گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه گیلان، صندوق پستی: ۱۹۱۴-۴۱۳۳۵، رشت - ایران

چکیده: در این کار تحقیقاتی، پارامترهای راکتور فیزیکی جدیدی برای راکتورهای هسته‌ای معرفی کرده‌ایم که تغییر آنها باعث تغییر رفتار کیفی راکتور می‌گردد. بر این اساس، فرمول‌بندی دینامیکی غیرخطی دو بعدی، سه بعدی و چهار بعدی با در نظر گرفتن تقریباً تمامی پارامترهای مؤثر بر رفتار راکتور، به منظور توصیف سیستم‌های راکتور شکافت هسته‌ای ارائه کرده‌ایم. با توجه به این معادلات، پایداری و ناپایداری سیستم دینامیکی ارائه شده و شرایط ایجاد پایداری در این سیستم‌ها، با استفاده از دو روش تحلیلی و عددی مورد بررسی قرار گرفته است. در این تحقیقات نشان داده‌ایم دو پارامتر زمان میانگین اقامت انرژی در سوخت و خنک‌کننده و هم چنین نسبت‌های آنها، بیشترین تأثیر کیفی را بر رفتار دینامیکی یک راکتور شکافت هسته‌ای نوعی داشته و افزایش یا کاهش آن از حد مشخصی، می‌تواند منجر به ایجاد پایداری و ناپایداری در سیستم مورد نظر گردد.

واژه‌های کلیدی: راکتور شکافت هسته‌ای، دینامیک غیرخطی، زمان میانگین اقامت انرژی، پایداری، ناپایداری

The Study of Two, Three and Four Dimensional Nonlinear Dynamics of Nuclear Fission Reactors and Effective Parameters on its Behaviour

M. Tajik*¹, A. Ghasemizad²

1- Faculty of Physics, Damghan University of Sciences, P.O. Box: 36716-41167, Damghan – Iran

2- Physics Department, Faculty of Sciences, Guilan University, P.O. Box: 41335-1914, Rasht – Iran

Abstract: In this research, new physical fission reactor parameters which have very sensitive effects on the qualitative behavior of a reactor, are introduced. Therefore, the two, the nonlinear dynamics of two, three and four dimensional, considering almost the effective parameters are formulated for describing nuclear fission reactor systems. Using both analytical and numerical methods, the stability and instability of the given dynamical equations and the conditions of stability are studied in these systems. We have shown that the two parameters of the mean energy residence time in fuel and coolant and also their ratios have the most qualitative effects on the dynamical behaviour of a typical nuclear fission reactor. Increasing or decreasing of these parameters from a certain limit can lead to stability or instability in a given system.

Keywords: Nuclear Reactor, Nonlinear Dynamics, Mean Energy Residence Time, Stable, Unstable

*email: tajik@dubs.ac.ir



۱- مقدمه

رآکتورهای شکافت، سیستم‌هایی هستند که واکنش‌های هسته‌ای معینی را با آهنگ کنترل شده ادامه می‌دهند. این واکنش‌ها می‌توانند شامل واپاشی تک ذره‌ای و همچنین برخورد دو ذره‌ای باشد، بطوریکه پارامترهای واکنش هسته‌ای توابعی از درجه حرارت محیط می‌باشند. شرایطی که رآکتورهای قدرت برای آنها طراحی شده‌اند و باید در دوره‌های طولانی تحت آن شرایط کار کنند، عبارتند از ضریب تکثیر دقیقاً برابر یک، شار نوترون، توان و دمای رآکتور ثابت. اما جنبه‌های دیگری از کار رآکتور نیز همواره باید مورد بررسی قرار گیرند. نخست نحوه تغییر شار نوترون، وقتی که رآکتور در حالت بحرانی نیست، باید مورد مطالعه قرار گیرد. این وضعیتی است که هنگام روشن شدن رآکتور یا هنگام افزایش توان (حالت فوق بحرانی) یا هنگام خاموش شدن رآکتور یا کاهش توان (حالت زیربحرانی) پیش می‌آید. در مرحله دوم آثار تغییرات دمایی درون رآکتور مورد توجه است، تغییرات دمایی ناشی از تغییر توان رآکتور ممکن است تغییراتی در رآکتیویته ایجاد کند که به نوبه خود بر توان تأثیر می‌گذارد. بنابراین یک فرایند پس‌خوراندی بوجود می‌آید که ویژگی‌های آن اثر مهمی بر ایمنی رآکتور دارند. مطالعه پاسخ رآکتور نسبت به تغییرات اندک ضریب تکثیر حول مقدار یک (که به ازای آن رآکتور در حالت پایا کار می‌کند)، سینتیک رآکتور و معادلات حاکم بر آن، معادلات دینامیکی نامیده می‌شود.

۲- روش بررسی

برای شروع بررسی و توصیف دینامیکی یک سیستم شکافت هسته‌ای، ابتدا باید پارامترهای متغیر با زمان آن را در نظر گرفت. این پارامترها را می‌توان در X_i به صورت زیر خلاصه کرد:

$$X_i = \{N_n, N_d, T_f, T_c, N_f, \dots\} \quad (1)$$

که در آن N_n چگالی نوترون، N_d چگالی یک گروه مؤثر از پیشروهای^(۱) نوترون تأخیری، T_f درجه حرارت سوخت، T_c درجه حرارت خنک‌کننده و N_f چگالی سوخت می‌باشد.

آهنگ واکنش ذرات هسته‌ای مربوطه، لزوماً معادلات دینامیکی غیرخطی یک سیستم رآکتور شکافت هسته‌ای را به صورت رابطه (۲) نشان می‌دهد:

$$\left. \frac{dX_i}{dt} \right| = f_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2)$$

که این معادلات معمولاً، معادلات غیرخطی جفت شده هستند.

۲-۱ روش تحلیلی

برای تحلیل معادلات (۲) و بررسی پایداری^(۲) سیستم، باید نقاط ثابت^(۳) معادلات دینامیکی سیستم در فضای حالت $\{X_i^*\}$ را با شرایط زیر بدست آوریم [۱]:

$$\left. \frac{dX_i}{dt} \right|_{X=X_i^*} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3)$$

با توجه به رابطه (۳)، دو نقطه ثابت برای این سیستم می‌توان بدست آورد. یکی از این نقاط را به علت بدست آوردن مقادیر مشخصی (لزوماً صفر برای بعضی از متغیرهای حالت)، نقطه ثابت توان صفر^(۴)، که شرایط آستانه روشن شدن رآکتور را مشخص می‌کند و نقطه دیگر نقطه ثابت توان کامل^(۵) که شرایط عمل‌کنندگی سیستم را در حین کار تعیین می‌کند، می‌نامیم. با توجه به نحوه کار رآکتور، معمولاً نقطه ثابت اول، ناپایدار و نقطه ثابت دوم، پایدار است که با تحلیل سیستم به شکل ریاضی می‌توان این موضوع را به اثبات رساند [۱ و ۲].

بدین ترتیب در این کار تحقیقاتی، کمیت‌های مؤثر در رفتار یک سیستم رآکتور شکافت هسته‌ای را بیان کرده و یک سیستم جفت شده غیرخطی بر اساس توصیف دینامیکی این متغیرها نوشته‌ایم. در این توصیف دینامیکی سعی کرده‌ایم که تقریباً تمام پارامترهای مؤثر بر رفتار کیفی رآکتور را در نظر گرفته و سیستم دینامیکی نسبتاً کاملی برای حالت‌های دو بعدی شامل دینامیک‌های لوینز^(۶)، هتریک^(۷)، مک^(۸)، سه بعدی شامل سیستم دینامیکی پس‌خوراند درجه حرارت سوخت خنک‌کننده^(۹) و چهار بعدی ارابه دهیم. در ادامه کار برای بررسی پایداری یا ناپایدار بودن یک سیستم رآکتور شکافت هسته‌ای، نوعی که بر اساس یکی از دسته معادلات دو بعدی، سه بعدی و چهار بعدی ارابه شده، دو روش تحلیلی و عددی بکار برده شده است. در روش تحلیلی برای بررسی پایداری یک سیستم هسته‌ای بدین ترتیب عمل کرده‌ایم که اگر اغتشاش کوچکی به سیستم وارد شود، آیا سیستم به نقطه ثابتش باز خواهد گشت؟ برای یک اغتشاش به اندازه کوچک δX داریم:

$$X = X^* + \delta X \quad (4)$$



حالت‌هایی می‌توانیم این تحلیل را با بکار بردن شرایط خاصی در ریاضی بنام معیار هورویتز^(۱۰) ساده کنیم [۴ و ۵]. با توجه به این معیار، شرایط لازم و کافی برای داشتن پایداری یک سیستم دینامیکی را تعیین نموده‌ایم. بدین ترتیب که همه ویژه مقادیر دارای یک قسمت حقیقی منفی باشند.

۲-۲ روش عددی

روش دیگری که برای بررسی پایداری یک سیستم دینامیکی بکار برده‌ایم، استفاده از روش عددی است. بدین ترتیب که با دانستن تمامی پارامترهای فیزیکی رآکتور (یا هر سیستم هسته‌ای) مورد بررسی با توان مشخص، معادلات دینامیکی سیستم را نوشته و توسط یک روش عددی متداول مانند رانگ-کوتا با استفاده از نرم‌افزار ریاضی MATLAB، این معادلات را حل کردیم [۶ و ۷]. سپس تغییر متغیرهای دینامیکی مورد بحث نسبت به زمان و همچنین تغییر آنها نسبت به یکدیگر، برای اغتشاشات وارد شده به سیستم در زمان‌های مختلف در نظر گرفته شده، در نمودارهایی آنها را رسم کرده و تحلیل نمودیم.

۳- سیستم‌های دینامیکی

۱-۳ دینامیک دوبعدی

یک روش مهم برای بررسی و توصیف دینامیکی یک رآکتور هسته‌ای، انتخاب یک مدل «توان-درجه حرارت» دوبعدی تحت عنوان «D-۲» است، بطوریکه داریم:

$$\frac{dN_n}{dt} = \frac{\rho(N_n, T_f)}{\Lambda} N_n \quad (10-الف)$$

$$\frac{dT_f(t)}{dt} = \gamma N_n(t) - R(T_f) \quad (10-ب)$$

که N_n چگالی نوترون، T_f درجه حرارت سوخت، ρ رآکتیویته، Λ طول عمر نوترون، γ ضریب گرمایی سوخت، R ثابت جابجایی گرمایی و t پارامتر زمان می‌باشند.

مناسب‌ترین و فیزیکی‌ترین نمایش دینامیکی برای $\rho(N_n, T_f)$ و $R(T_f)$ در دو بعد را می‌توان با دینامیک‌های زیر توصیف کرد:

۳-۱-۱ دینامیک لوینز

در این دینامیک ρ و R با عبارات زیر ارائه می‌شوند [۸]:

$$\rho = a_f(T_f(t) - T_{f0}) \quad (11)$$

که δX لزوماً در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\frac{d(\delta X)}{dt} \cong J(\delta X) \quad (5)$$

و J ژاکوبین متناظر، با رابطه زیر داده می‌شود [۲ و ۳].

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & \dots & J_{1n} \\ J_{21} & J_{22} & \dots & J_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{n1} & J_{n2} & \dots & J_{nn} \end{bmatrix}; \quad J_{i,j} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right]_{X=X_j^*} \quad (6)$$

که f_i تابع i ام در سمت راست معادلات دینامیکی تعریف شده است. معادله (۵)، در حد تغییرات به اندازه کافی کوچک δX ، رابطه‌ای دقیق است با پذیرفتن اینکه در معادله زیر صدق می‌کند.

$$\delta X_i = a_{i,1} \exp(\lambda_1 t) + a_{i,2} \exp(\lambda_2 t) + a_{i,3} \exp(\lambda_3 t) + \dots \quad (7)$$

که $a_{i,j}$ ثابت‌هایی وابسته به ژاکوبین و شرایط اولیه مسیر حول X_j^* هستند و λ_j نیز به ازای مقادیر $j=1,2,\dots,n$ مقادیر ویژه می‌باشد. برای تعیین این مقادیر ویژه، لازم است که معادله مشخصه ژاکوبین را بدست آوریم. در این صورت داریم:

$$\det(J - \lambda I) = 0 \quad (8)$$

در نتیجه، یک معادله درجه n ام بر حسب λ خواهیم داشت. برای λ_j می‌توانیم داشته باشیم:

$$\lambda_j = \text{Re } \lambda_j + i \text{Im } \lambda_j \quad (9)$$

بنابراین، توصیف پایداری سیستم دینامیکی را می‌توان؛ از تعیین علامت قسمت حقیقی ویژه مقادیر λ_j بدست آورد. اگر همه قسمت‌های حقیقی λ_j منفی باشند، با توجه به رابطه (۷) بعد از گذشت مدت t ، δX به سمت صفر میل می‌کند و سیستم پایدار می‌گردد، اما اگر قسمت حقیقی یکی از λ_j ها مثبت باشد، δX بعد از گذشت زمان t بزرگ شده و سیستم ناپایدار می‌شود. برای سیستم دینامیکی سه بعدی یا بیشتر؛ یک حل مستقیم تحلیلی برای تعیین مقادیر ویژه، از نظر جبری مشکل است. در چنین



$$\rho = g(T_f(t), T_c(t)) \quad (15)$$

بنابراین پارامتر رآکتیویته می‌تواند تأثیر بسیار مهمی بر دینامیک رآکتور داشته باشد.

با استفاده از قانون بقای انرژی، معادلات دینامیکی برای درجه حرارت سوخت و خنک‌کننده به شکل زیر می‌باشد [۱۲]:

$$\frac{dT_j}{dt} = q_{in} H_{j,in} - q_{out} H_{j,out} + \sum_k \varepsilon_{jk} R_{jk} Q_{jk} \quad (16)$$

در اینجا q پارامتر رسانایی، $H_{j,in}$ آهنگ جریان انرژی وارد شده به محیط، $H_{j,out}$ آهنگ جریان انرژی خارج شده از محیط، Q مقدار انرژی واکنش، ε و R_{jk} پارامترهای گرمایی می‌باشند.

بررسی و توصیف دینامیک یک رآکتور شکافت را با استفاده از سه متغیر حالت اساسی حاکم بر رفتار رآکتور شروع می‌کنیم. دینامیک مورد نظر را برای چگالی نوترون، N_n ، تغییرات درجه حرارت سوخت، T_f و تغییرات درجه حرارت خنک‌کننده، T_c در نظر می‌گیریم. بطوریکه از چگالی پیشرو نوترون تأخیری صرف نظر کرده‌ایم. با توجه به این که رآکتیویته، ρ ، به صورت تابعی از درجه حرارت سوخت، $T_f(t)$ و درجه حرارت خنک‌کننده، $T_c(t)$ می‌باشد، برای رآکتیویته خواهیم داشت [۱۲]:

$$\rho = a_f(T_f(t) - T_{fo}) + a_c(T_c(t) - T_{co}) \quad (17)$$

در اینجا a_f و a_c ، به ترتیب ضریب دمایی رآکتیویته سوخت و خنک‌کننده است، T_{co} و T_{fo} ، به ترتیب درجه حرارت سوخت و درجه حرارت خنک‌کننده در حالت عمل‌کنندگی اسمی می‌باشد.

با جایگذاری معادله (۱۷) در معادله (۱۳) و با بکار بردن قانون خنک‌کنندگی نیوتن برای مرزهای سوخت-خنک‌کننده و خنک‌کننده-مبدل بخار با استفاده از معادله (۱۶) معادلات دینامیک غیرخطی زیر حاصل می‌شوند:

$$\frac{dN_n(t)}{dt} = \frac{(\rho - \beta)}{\Lambda} N_n(t) \quad (18\text{-الف})$$

$$\frac{dT_f(t)}{dt} = \gamma N_n(t) - \frac{T_f(t) - T_c(t)}{\tau_f} \quad (18\text{-ب})$$

$$\frac{dT_c(t)}{dt} = \frac{T_f(t) - T_c(t)}{\tau_f} - \frac{T_c(t) - T_{sink}}{\tau_c} \quad (18\text{-ج})$$

نداشتن جابجایی گرمایی (از دست دادن خنک‌کننده)

$$R(T_f) = 0$$

که α_f ضریب دمایی رآکتیویته سوخت است و T_{fo} درجه حرارت سوخت در حالت عمل‌کنندگی اسمی می‌باشد.

۳-۱-۲ دینامیک هتریک

در این دینامیک داریم [۹]:

$$\rho = a_f(T_f(t) - T_{fo})$$

ثابت بودن جابجایی گرمایی:

$$R(T_f) = \gamma N_{op}$$

که N_{op} چگالی نوترون در حالت عمل‌کنندگی اسمی رآکتور می‌باشد.

۳-۱-۳ دینامیک مک

در این دینامیک نیز داریم [۱۰]:

$$\rho = a_f(T_f(t) - T_{fo})$$

طبق قانون خنک‌کنندگی نیوتن

$$R(T_f) = \frac{(T_f(t) - T_{co})}{\tau_f} \quad (12)$$

که T_{co} درجه حرارت خنک‌کننده در حالت عمل‌کنندگی اسمی و τ_f میانگین اقامت انرژی در سوخت می‌باشد.

۳-۲ دینامیک سه بعدی رآکتورهای شکافت

یک دینامیک مناسب و مفید برای بررسی دینامیک رآکتور، معادلات زیر می‌باشند [۱۱].

$$\frac{dN_n}{dt} = \frac{(\rho - \beta)}{\Lambda} N_n + \sum \lambda_i N_i \quad (13)$$

$$\frac{dN_i}{dt} = \frac{\beta}{\Lambda} N_n - \lambda_i N_i \quad (14)$$

بطوریکه، N_n چگالی نوترون، N_i چگالی پیشرو نوترون تأخیری، β کسر بهره نوترون‌های تأخیری شکافت، Λ طول عمر نوترون، λ_i ثابت واپاشی نوترون‌های تأخیری است، حساسترین پارامتری که در معادلات فوق وجود دارد، ρ ، رآکتیویته می‌باشد، زیرا تابعی از درجه حرارت سوخت، $T_f(t)$ و درجه حرارت خنک‌کننده، $T_c(t)$ است. یعنی:



با استفاده از روابط (۲۰) و معادلات (۱۰) برای دینامیک لوینز و هتريک یک نقطه ثابت و برای دینامیک مک دو نقطه ثابت مشخص می گردد:

برای دینامیک لوینز داریم:

$$X_1^* \equiv [N_n^*, T_f^*] \equiv [0, T_{fo}]$$

X_1^* را نقطه ثابت توان صفر (که شرایط آستانه روشن شدن رآکتور را مشخص می کند) می نامیم.

برای دینامیک هتريک داریم:

$$X_1^* \equiv [N_n^*, T_f^*] \equiv [N_{op}, T_{fo}]$$

X_2^* را نقطه ثابت توان کامل (که شرایط عمل کنندگی رآکتور را در حال کار تعیین می کند) می نامیم.

برای دینامیک مک داریم:

$$X_1^* \equiv [N_{n,1}^*, T_{f,1}^*] \equiv [0, T_{co}]$$

$$X_2^* \equiv [N_{n,2}^*, T_{f,2}^*] \equiv \left[\frac{T_{fo} - T_{co}}{\gamma \tau_f}, T_{fo} \right]$$

X_1^* نقطه ثابت توان صفر که شرایط آستانه روشن شدن رآکتور را مشخص می کند. در نتیجه این نقطه، نقطه ای ناپایدار برای عمل کنندگی دینامیک مزبور می باشد. X_2^* را نقطه ثابت توان کامل که شرایط عمل کنندگی رآکتور را در حالت پایا نشان می دهد. حال برای بررسی پایداری سیستم های دینامیکی دو بعدی؛ ویژه مقادیر λ را بر اساس معادلات (۶) و (۸) بدست می آوریم. با توجه به علامت ریشه های معادله مشخصه ژاکوبین، سیستم های دینامیکی لوینز و هتريک، نمی تواند بیان کننده یک سیستم پایدار باشد و سیستم دینامیکی مک برای $a_f > 0$ به ازای هر مقدار T_f ، ناپایدار است و برای $a_f < 0$ با توجه به اینکه T_f همواره مثبت می باشد، ویژه مقادیر منفی می باشند. بنابراین سیستم دینامیکی مک، برای ضریب دمایی رآکتیویته منفی بیان کننده یک سیستم پایدار است.

۴-۲ تحلیل پایداری سیستم دینامیکی پس خوراند درجه حرارت سوخت-خنک کننده

با اعمال شرط (۳) بر معادلات دینامیکی (۱۸) خواهیم داشت:

بطوریکه T_c و T_f به ترتیب میانگین زمان اقامت انرژي در سوخت و خنک کننده و T_{sink} درجه حرارت مبدل بخار می باشد. معادلات (۱۸) را تحت عنوان «دینامیک پس خوراند درجه حرارت سوخت-خنک کننده» می نامیم. a_f ، همواره منفی است در حالیکه a_c ، می تواند مثبت یا منفی باشد.

۳-۳ توصیف دینامیک یک سیستم رآکتور شکافت در چهار بعد

توصیف دینامیک یک سیستم رآکتور شکافت را با استفاده از چهار متغیر حالت اساسی و حاکم بر رفتار رآکتور در نظر می گیریم. دینامیک مورد نظر را برای چگالی نوترون، N_n ، چگالی یک گروه مؤثر از پیشروهای نوترون تأخیری، N_d ، درجه حرارت سوخت، T_f و درجه حرارت خنک کننده، T_c بررسی می کنیم.

با جایگذاری معادله (۱۷) در معادله (۱۳) و ترکیب آن با معادلات (۱۴) و (۱۶)، معادلات دینامیک غیرخطی زیر حاصل می شود:

$$\frac{dN_n(t)}{dt} = \frac{(\rho - \beta)}{\Lambda} N_n(t) + \lambda_d N_d(t) \quad (۱۹-الف)$$

$$\frac{dN_d(t)}{dt} = \left(\frac{\beta}{\Lambda}\right) N_n(t) - \lambda_d N_d \quad (۱۹-ب)$$

$$\frac{dT_f(t)}{dt} = \gamma N_n(t) - \frac{T_f(t) - T_c(t)}{\tau_f} \quad (۱۹-ج)$$

$$\frac{dT_c(t)}{dt} = \frac{T_f(t) - T_c(t)}{\tau_f} - \frac{T_c(t) - T_{sink}}{\tau_c} \quad (۱۹-د)$$

در معادلات (۱۹)، a_f همواره منفی است در حالیکه a_c با توجه به جنس خنک کننده و ساختار رآکتور، می تواند مثبت یا منفی باشد.

۴- تحلیل پایداری سیستم های دینامیکی

۱-۴ تحلیل پایداری سیستم های دینامیکی دوبعدی

با اعمال شرط (۳) بر معادلات (۱۰) خواهیم داشت:

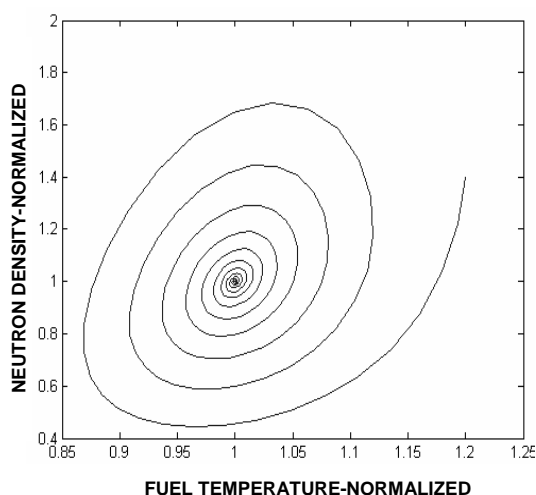
$$\left. \frac{dN_n}{dt} \right|_{N_n=N_n^*} = 0 \quad ; \quad \left. \frac{dT_f}{dt} \right|_{T_f=T_f^*} = 0 \quad (۲۰)$$

روابط (۲۰)، باید بطور همزمان در نقاط تعادل برقرار باشند.

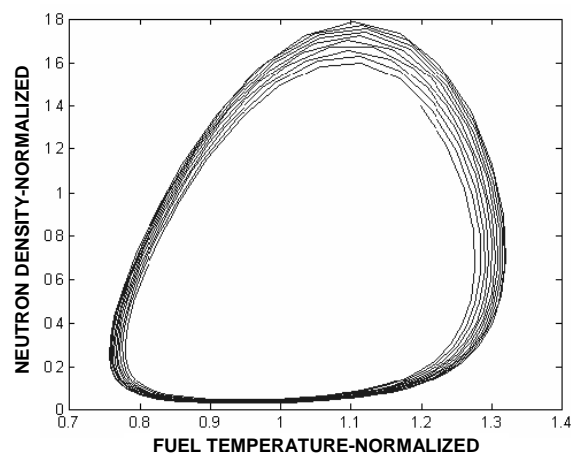


بزرگتر از یک) مقادیر τ_f و τ_c بیشتر از یک حد معین، می‌توانند باعث ناپایداری و کمتر از آن منجر به پایداری سیستم موردنظر گردد. این مطلب به وضوح در شکل ۱ نشان داده شده است.

سیستم دینامیکی موردنظر به ازای $\frac{\tau_f}{\tau_c} = 1.9$ و $\tau_f = 0.171$ پایدار و به ازای $\frac{\tau_f}{\tau_c} = 1.9$ و $\tau_f = 0.076$ ناپایدار است. برای حالت $a_c > 0$ شرط پایداری سیستم دینامیکی موردنظر به ازای مقادیر از نسبت $\frac{\tau_f}{\tau_c}$ برقرار است که بزرگتر از ۲ باشد. این مطلب در شکل ۲ بخوبی نشان داده شده است. سیستم دینامیکی موردنظر به ازای $\frac{\tau_f}{\tau_c} = 12$ پایدار و به ازای $\frac{\tau_f}{\tau_c} = 1.9$ ناپایدار است.



(a)



(b)

شکل ۱- نمودار تغییرات چگالی نوترون بر حسب درجه حرارت سوخت، در دینامیک پس‌خوراند درجه حرارت سوخت- خنک‌کننده- حالت ۲ منفی (a) به ازای $\tau_f = 0.171$ و $\frac{\tau_f}{\tau_c} = 1.9$ (b) به ازای $\tau_f = 0.076$ و $\frac{\tau_f}{\tau_c} = 1.9$.

$$\left. \frac{dN_n}{dt} \right|_{N_n=N_n^*} = 0 ; \left. \frac{dT_f}{dt} \right|_{T_f=T_f^*} = 0 ; \left. \frac{dT_c}{dt} \right|_{T_c=T_c^*} = 0 \quad (21)$$

روابط (۲۱)، باید بطور همزمان در نقاط تعادل برقرار باشند. با استفاده از روابط (۲۱) و معادلات (۱۸) دو نقطه ثابت مشخص می‌گردد:

- نقطه ثابت توان صفر (که شرایط آستانه روشن شدن رآکتور را مشخص می‌کند).

$$N_{n,1}^* = 0 ; T_{f,1}^* = T_{\text{sink}} ; T_{c,1}^* = T_{\text{sink}}$$

- نقطه ثابت توان کامل (که شرایط عمل‌کنندگی رآکتور را در حال کار تعیین می‌کند).

$$N_{n,2}^* = \frac{T_{c,2}^* - T_{\text{sink}}}{\gamma \tau_c}$$

$$T_{f,2}^* = T_{c,2}^* \left(1 + \frac{\tau_f}{\tau_c}\right) - T_{\text{sink}} \frac{\tau_f}{\tau_c}$$

$$T_{c,2}^* = \frac{a_f (T_{f,0} + T_{\text{sink}} \frac{\tau_f}{\tau_c}) + a_c T_{c,0}}{a_f \left(1 + \frac{\tau_f}{\tau_c}\right) + a_c}$$

دسته دوم جواب‌ها را به دو حالت $a_c < 0$ (تحت عنوان حالت ۲ منفی) و $a_c > 0$ (تحت عنوان حالت ۲ مثبت) نامگذاری می‌کنیم. اکنون با مشخص شدن دو نقطه ثابت، پایداری سیستم حول این نقاط می‌تواند تعیین شود.

۴-۲-۱- بررسی تحلیلی نقاط ثابت

با بکار بردن معیار هورویتز برای معادله مشخصه با توان صفر به ازای مقادیر $a_c > 0$ و $a_c < 0$ در می‌یابیم که نقطه عمل‌کنندگی توان صفر همواره ناپایدار است.

برای نقطه ثابت توان کامل دو معادله مشخصه برای حالت‌های $a_c < 0$ و $a_c > 0$ خواهیم داشت.

با اعمال معیار هورویتز برای معادلات مشخصه، حالت $a_c < 0$ و $a_c > 0$ نتیجه می‌گیریم که نقطه ثابت توان کامل

برای حالت $a_c < 0$ به ازای یک $\frac{\tau_f}{\tau_c}$ مشخص، (کوچکتر یا



- $N_{n,1}^* = 0 ; N_{d,1}^* = 0 ; T_{f,1} = 200^\circ\text{C} ; T_{c,1} = 200^\circ\text{C}$
- نقطه ثابت توان کامل (که شرایط عمل کنندگی رآکتور را در حال کار تعیین می کند).

$$N_{n,2}^* = \frac{294117.6471(a_f T_{f0} + a_c T_{c0} - 200(a_f + a_c))}{a_f \tau_f + (a_f + a_c) \tau_c}$$

$$N_{d,2}^* = \frac{\beta}{\lambda_d \Lambda} N_{n,2}^*$$

$$T_{f,2}^* = \frac{a_f T_{f0} (\tau_f + \tau_c) + a_c T_{c0} (\tau_f + \tau_c) - 200(\tau_f a_c)}{a_f \tau_f + (a_f + a_c) \tau_c}$$

$$T_{c,2}^* = \frac{a_f T_{f0} \tau_c + a_c T_{c0} \tau_c + 200(\tau_f a_f)}{a_f \tau_f + (a_f + a_c) \tau_c}$$

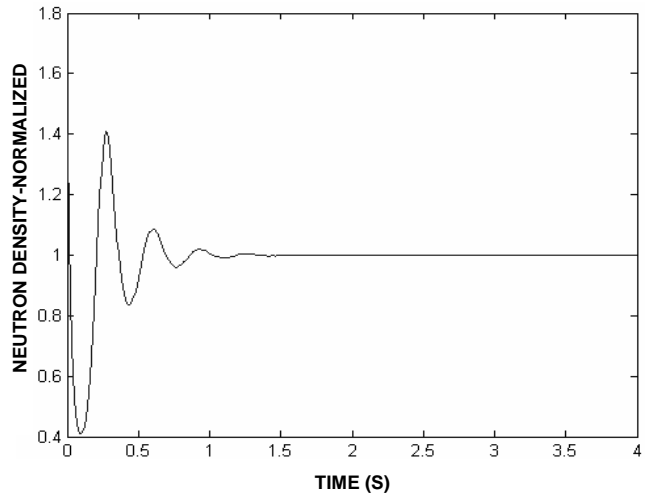
اکنون با مشخص شدن دو نقطه ثابت، پایداری سیستم حول این نقاط می تواند تعیین شود.

۳-۴ بررسی تحلیلی نقاط ثابت سیستم دینامیکی چهار بعدی

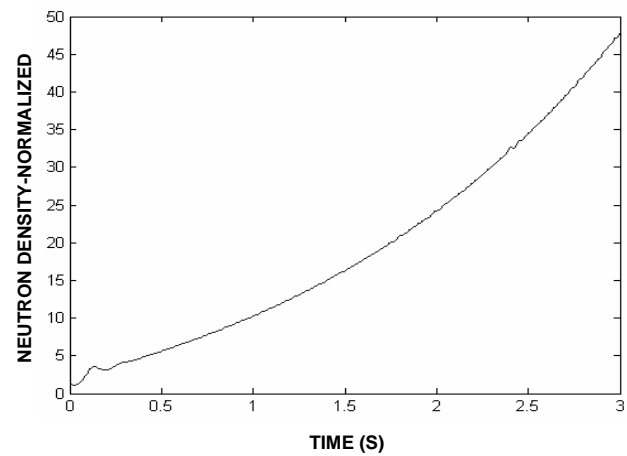
- نقطه ثابت توان صفر
- معادله مشخصه برای نقطه ثابت توان صفر یعنی $X_1^* = \{N_{n,1}^*, N_{d,1}^*, T_{f,1}^*, T_{c,1}^*\}$ با استفاده از مقادیر جدول ۱ یک معادله درجه چهار بر حسب λ خواهد بود، با حل معادله مشخصه و علامت قسمت حقیقی ویژه مقادیر درمی یابیم که نقطه عمل کنندگی توان صفر همواره ناپایدار است. زیرا هنگامیکه سیستم در آستانه روشن شدن باشد؛ ظهور حتی یک نوترون، منجر به تکثیر نوترون و افزایش توان خواهد شد.
- نقطه ثابت توان کامل سیستم دینامیکی چهار بعدی برای نقطه ثابت توان کامل، دو معادله مشخصه برای حالت های $a_c < 0$ و $a_c > 0$ خواهیم داشت.

جدول ۱- مقادیر پارامترهای استفاده شده در محاسبات برای یک رآکتور شکافت هسته ای نوعی.

$a_f = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$T_{f0} = 850^\circ\text{C}$
$a_c = 3 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$T_{c0} = 250^\circ\text{C}$
$\beta = 0.0075$	$T_{\text{sink}} = 200^\circ\text{C}$
$\Lambda = 10^{-4} \text{ s}$	τ_f - متغیر
$\gamma = 3.4 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-3} \text{ } ^\circ\text{C s}^{-1}$	τ_c - متغیر
$\lambda_d = 0.08 \text{ s}^{-1}$	



(a)



(b)

شکل ۲- نمودار تغییرات چگالی نوترون بر حسب زمان، در دینامیک پس خوراند درجه حرارت سوخت-خنک کننده- حالت ۲ مثبت به ازای

$$\tau_f / \tau_c = 1.9 \text{ (b)}, \tau_f / \tau_c = 12 \text{ (a)}, \tau_f = 0.12$$

۳-۴ تحلیل پایداری سیستم دینامیکی چهار بعدی

با اعمال شرط (۳) بر معادلات دینامیکی (۱۹) خواهیم داشت:

$$\left. \frac{dN_n}{dt} \right|_{N_n=N_n^*} = 0 \quad \text{و} \quad \left. \frac{dN_d}{dt} \right|_{N_d=N_d^*} = 0$$

$$\left. \frac{dT_f}{dt} \right|_{T_f=T_f^*} = 0 \quad \text{و} \quad \left. \frac{dT_c}{dt} \right|_{T_c=T_c^*} = 0 \quad (22)$$

روابط (۲۲) باید بطور همزمان در نقاط تعادل برقرار باشند. با استفاده از روابط (۲۲) و معادلات (۱۹) دو نقطه ثابت مشخص می گردد:

- نقطه ثابت توان صفر (که شرایط آستانه روشن شدن رآکتور را مشخص می کند).



References:

1. A.A. Harms, "Interactive nuclear kinetics and nonlinear dynamics," *Ann.nucl.Energy*, **10**, No.12 (1983).
2. M.R. Eskandari and A. Ghasemi-Zad, "Dynamics of intrinsically safe pellet suspension reactors," *Iranian Journal of Science and Technology*, **20**, No.4 (1996).
3. R.K. Miller and A.N. Michel, "Ordinary differential equation," Academic Press. N.Y (1982).
4. C.C. Bissell and Stodola, "Hurwitz and the genesis of the stability criterion," *Int. J Control* **50**(6), 2313-2332 (1989).
5. E. Jury, "From sylvester to hurwitz: A historical review, in: stability theory," *Internat. Ser. Numer. Math.*, vol. 121, Birkhäuser, Basel, pp. 53-65 (1996).
6. J. Sanchez, "On the numerical solution of the point reactor kinetics equation by generalized runge-kutta methods," *Nuclear Science and Engineering*, **103**, 94-99 (1989).
7. V.N. Vedamurthy and N. Lyngar, "Numerical methods," Vikas Publishing House, PUT.LTD (1999).
8. J. Lewins, "Nuclear reactors kinetics and control," Pergamon Press, Oxford, U.K (1978).
9. D.L. Hetric, "Dynamics of nuclear reactors," Chicago university Press, USA (1971).
10. A.A. Harms, MacMaster University Reports (1990).
11. D.J. Bennet and J.R. Thomson, "The elements of nuclear power," longman Scientific & Technical (1989).
12. A.A. Harms and Z. Bilanovic, "Nonlinear dynamics of three-dimensional point fission reactors," Plenum Publishing corporation (1989).

با بکار بردن معیار هورویتز برای معادلات مشخصه، $a_c < 0$ و $a_c > 0$ ، نتیجه می‌گیریم که نقطه ثابت توان کامل برای حالت $a_c < 0$ همیشه دارای ریشه‌های حقیقی منفی است و سیستم مزبور برای تمام مقادیر پارامترها، پایدار است. و برای حالت $a_c > 0$ ، شرط پایداری سیستم دینامیکی مورد نظر به ازای مقادیری از نسبت $\frac{\tau_f}{\tau_c}$ برقرار است که بزرگتر از ۲ باشد.

۵- تحلیل‌های عددی

در این بخش، بررسی معادلات دینامیکی ارائه شده را برای یک رآکتور شکافت هسته‌ای نوعی با ثابت‌های رآکتوری مشخص که در جدول ۱ داده شده است انجام داده‌ایم. بر اساس معادلات دینامیکی غیرخطی ارائه شده و حل عددی این معادلات با استفاده از نرم‌افزار ریاضی MATLAB؛ شرایط پایداری و ناپایداری سیستم برای اغتشاشات ارائه شده در زمان‌های مختلف در نظر گرفته شده است. این نتایج را در شکل‌های ۱ و ۲ نشان داده‌ایم. شرط پایداری و ناپایداری سیستم دینامیکی مورد نظر به ازای مقادیر τ_c و τ_f در حل عددی، با نتایج بررسی تحلیلی یکسان است و شکل‌ها نیز تأییدکننده این مدعاست.

۶- نتیجه‌گیری

با استفاده از معادلات دینامیکی غیرخطی ارائه شده دو بعدی مک، سیستم‌های دینامیکی سه بعدی و چهار بعدی و حل تحلیلی و عددی این معادلات؛ دریافتیم که دو پارامتر معرفی شده τ_c و τ_f و به ویژه نسبت آنها تأثیر بسیار زیادی بر رفتار کیفی یک رآکتور نوعی داشته و افزایش یا کاهش این دو پارامتر از حد معینی؛ باعث می‌شود که رفتار کیفی رآکتور از روندی پایدار به روندی ناپایدار تبدیل گردد؛ بنابراین نسبت $\frac{\tau_f}{\tau_c}$ می‌تواند بعنوان پارامتر طراحی خوبی برای کار سیستم در حالت پایدار مورد استفاده قرار گیرد.

پی‌نوشت‌ها:

- ۱- Precursors
- ۲- Stability
- ۳- Fixed Points
- ۴- Zero-Power Fixed Point
- ۵- Full-Power Fixed Point
- ۶- Lewins
- ۷- Hetric
- ۸- Mac
- ۹- Fuel-Coolant Temperature Feedback Dynamics
- ۱۰- Hurwitz Criterion